

מתמטיקה בדידה

פרק 2 - יחסים

תוכן העניינים

1. יחסים.....1

יחסים

שאלות

- 1) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר A , כך ש- R יחס מעל A .
- א. $R = \{2, 5, (7, 8)\}$
- ב. $R = \{(1, 3), (3, 7), (2, 5)\}$
- ג. $R = \{((1, 2), (3, 4)), ((1, 3), (2, 4))\}$
- 2) עבור הקבוצות משאלה 1, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את $\text{dom}(R)$ ואת $\text{range}(R)$, ורשמו את היחס במטריצה.
- 3) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים. היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b > a + 3$, כאשר:
- א. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ב. $A = \{3, 5, 19, 103\}$
- ג. $A = \{5, 6, 7\}$
- 4) עבור $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:
- א. $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 < 5\}$
- ב. $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 > 5\}$
- ג. $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid x < y + 2\}$
- ד. $R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid x \cdot y > 8\}$
- 5) תהי $\mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$ הקבוצה $\mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$, ונגדיר עליה יחס R כך: $aRb \Leftrightarrow [a = b^b \vee b = a^a]$.
- א. האם $1R1$? האם R רפלקסיבי?
- ב. האם R סימטרי?
- ג. האם R אנטי-סימטרי?
- ד. האם R טרנזיטיבי?

6 נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, כך: $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow |y - x| > 2$.

א. רשמו את R במפורש בעזרת $\langle \dots \rangle$ ובעזרת דיגרף.

ב. חשבו את היחס R^{-1} ואת כל החזקות השונות של R .

ג. מצאו אם היחס R מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:

$$R \cap R^{-1} \subseteq I_A, \quad R = R^{-1}, \quad I_A \subseteq R, \quad R^2 \subseteq R$$

7 יהי R יחס מעל A . הוכיחו:

א. אם $I_A \subseteq R$, אז R רפלקסיבי.

ב. אם $R = R^{-1}$, אז R סימטרי.

ג. אם $R^2 \subseteq R$, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, אז R אנטי-סימטרי.

8 נתונים היחסים הבאים מעל $A = \{1, 2, 3\}$,

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 1)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1, R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$,

קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.

(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

9 עבור $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, נגדיר S מעל A כך:

$$S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 6, 3 \rangle\}$$

א. בדקו אם S רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.

ב. רשמו את היחסים I_A ו- S^{-1} .

ג. רשמו את כל החזקות השונות של S .

ד. רשמו את היחס $R = \{1, 3, 6\}^2 \cup \{2, 4\}^2 \cup \{5\}^2$, כקבוצה של זוגות.

10 לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.

א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $\langle x, y \rangle \in @ \Leftrightarrow |x - y| \leq 100$.

ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $\langle x, y \rangle \in \clubsuit \Leftrightarrow 3|x - y|$.

ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $A \subseteq B \Leftrightarrow (A, B) \in \subseteq$.

ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: שרגא $\langle x, y \rangle \in$ שרגא $x + y \geq x \cdot y$.

ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $\langle x, y \rangle \in T \Leftrightarrow x^2 + y \geq 1$.

11 נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, על ידי $\langle f, g \rangle \in R$ אם ורק אם קיימת $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית, כך ש- $f(n) = g(n)$ לכל $n \in A$.

א. האם R רפלקסיבי?

ב. האם R אנטי-סימטרי?

ג. האם R טרנזיטיבי?

12 בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{R}$, כך: $aTb \Leftrightarrow a < b+1$.

ב. נגדיר יחס P מעל $P(\mathbb{N})$, כך: $APB \Leftrightarrow (A = B \vee A \cup \{1, 2\} = B)$.

13 מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, A = \{3, 5, 7, 9\}$.

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \ x = my$

ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{even}} \ x = my$

ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \ (x = my \vee y = mx)$

14 עבור $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ נגדיר יחס S על A כך: $xSy \Leftrightarrow x \cdot y \geq 2$.

א. האם $S^2 \setminus S = \emptyset$?

ב. האם S יחס שקילות על A ?

15 תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ויהי R יחס מעל A .

איזו טענה נכונה:

א. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ הוא יחס הזהות מעל A .

ב. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ הוא היחס המלא מעל A .

ג. אם R הוא היחס המלא מעל A , אז R^{-1} הוא היחס המלא מעל A .

ד. אם R הוא יחס הזהות מעל A , אז R^{-1} הוא יחס הזהות מעל A .

ה. יהי R יחס מעל $A = \{1, 2\}$.

האם יתכן כי R אינו טרנזיטיבי? נמקו.

16 תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ויהי R יחס מעל A .

איזו טענה נכונה:

א. ה-Domain של $R = \{(1,1), (2,2), (1,3)\}$ הוא $\{1, 2\}$.

ב. ה-Range של $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ הוא $\{2, 3, 1\}$.

ג. ה-Domain של היחס $R = \{(1,1), (2,2), (1,3)\}$ שווה ל-Range של R^{-1} .

17 תהי $A = \{1, 2, 5\}$ ויהי R יחס מעל A .

איזו טענה נכונה:

א. אם R הוא יחס הזהות $(R = I_A)$, אז $R = \{(1,1), (2,2), (5,5)\}$.

ב. אם R הוא היחס המלא, אז

$R = \{(1,1), (1,2), (1,5), (2,1), (2,2), (2,5), (5,1), (5,2), (5,5)\}$.

ג. אם R הוא יחס הזהות, אז $\left((IR)^{-1}\right)^{-1} = R$.

18 עבור $A = \{1, 2, 3\}$ נגדיר יחסים R, S מעל A כך:

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}, \quad S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$$

א. חשבו את היחסים RS ו- SR , ובדקו האם הם יחסי שקילות.

ב. האם היחסים S ו- S^2 אנטי-סימטריים? נמקו.

19 תהיינה $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{5, 6\}$, יהי R יחס כך ש- $R \subseteq A \times B$,

ויהי S יחס כך ש- $S \subseteq B \times C$.

איזו טענה נכונה:

א. $SR = \emptyset$.

ב. אם R ו- S יחסים מלאים, אז ב- RS יש ארבעה איברים.

ג. אם R הוא היחס הריק ו- S הוא היחס המלא, אז $RS = S$.

ד. ה-Domain שווה ל-Range של $S^{-1}R^{-1}$.

(20) תהי $A = \{1, 2, 5\}$ ויהי $R = \{(1,1), (1,2), (2,5), (5,5)\}$ יחס מעל A .

- הביעו את R בצורה של גרף.
- הביעו את R^{-1} בצורה של גרף.
- הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של גרף.
- הביעו את היחס המלא מעל A בצורה של גרף.
- הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של מטריצת סמיכויות.
- הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.
- הביעו את RR^{-1} בצורה של גרף.
- הביעו את $R \cup R^{-1}$ בצורה של גרף.
הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.
- הביעו את $(R^{-1}R) \cap (RR^{-1})$ בצורה של מטריצת סמיכויות.
- הביעו את $(R^{-1}R) \setminus (RR^{-1})$ בצורה של גרף.
- הביעו את $(R^{-1}R) \Delta (RR^{-1})$ בצורה של גרף.

(21) תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ויהי $R = \{(1,2), (2,1), (1,3)\}$ יחס מעל A .

- רשמו את הסגור הרפלקסיבי של R .
- רשמו את הסגור הסימטרי של R .
- רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של R .

(22) תהי $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים, ויהי $R \subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1, n_1) R (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 - m_2 = n_1 - n_2$.

- הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב- A .
- תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות $[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, [(2,1)]_R$.

(23) נתון היחס R מעל $\mathbb{N}$.

$$xRy \Leftrightarrow (6 \mid x - y) \vee (3 \nmid x \cdot y)$$

מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

(24) תהי S קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי E מעל S באופן הבא:

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow AEB$$

הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

25 נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z} - \{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
 $aEb \Leftrightarrow ab \geq -1$.

הוכיחו כי E יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

26 נגדיר יחס שקילות S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$

ונגדיר יחס שקילות T מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2 - 9)S(y^2 - 9)$.

(אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)

כתבו במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$, ונמקו בקצרה.

שאלות מחשבה

27 תהי A קבוצה ו- R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
 בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

- אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.
- אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
- אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
- אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R = \emptyset$.
- אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R = \emptyset$.
- אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.
- אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.
- אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

28 תהי A קבוצה ויהיו R, S יחסים מעל A .
 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):

- אם R, S רפלקסיביים, אז $R \cap S$ רפלקסיבי.
- אם R, S רפלקסיביים, אז $R \cup S$ רפלקסיבי.
- אם R, S סימטריים, אז $R \cap S$ סימטרי.
- אם R, S סימטריים, אז $R \cup S$ סימטרי.
- אם R, S טרנזיטיביים, אז $R \cap S$ טרנזיטיבי.
- אם R, S טרנזיטיביים, אז $R \cup S$ טרנזיטיבי.
- אם R, S יחסי שקילות, אז $R \cap S$ יחס שקילות.
- אם R, S יחסי שקילות, אז $R \cup S$ יחס שקילות.
- אם R, S אנטי סימטריים חלש, אז $R \cap S$ אנטי סימטרי חלש.
- אם R, S אנטי סימטריים חלש, אז $R \cup S$ אנטי סימטרי חלש.